

Análisis de la tasa de falla de una banda elástica de látex mediante métodos estadísticos no paramétricos

Failure rate analysis of a latex elastic band using non-parametric statistical methods

*Miguel Cedeño Hernández**,
Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Física y Matemáticas, México
cedeno@esfm.ipn.mx

Arturo Fidencio Méndez Sánchez,
Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Física y Matemáticas, México
arturo@esfm.ipn.mx

Patricia Sánchez Cruz,
Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Física y Matemáticas, México
paty_naturaleza@hotmail.com

Recibido 24, enero, 2018

Aceptado 30, mayo, 2018

Resumen

Los objetos que se encuentran sujetos a un trabajo o esfuerzo constante son susceptibles de fallar con el paso del tiempo. Estas fallas pueden presentarse de manera aleatoria y si son máquinas costosas o equipos difícilmente reparables como los satélites en órbita los costos son altísimos, de ahí el interés de estudiar este tipo de técnicas para analizar la tasa de falla. En el presente trabajo se utiliza la prueba estadística no paramétrica conocida como "prueba de Epstein". Esta prueba, fue diseñada para determinar si el comportamiento de un objeto o aparato que se encuentre en un funcionamiento continuo y el cual, es susceptible a fallar de manera aleatoria, presenta una tasa de falla creciente (IFR). Como elemento experimental se analizó una banda elástica de látex de tipo comercial y se contrastó la hipótesis de un comportamiento IFR en la misma.

Palabras clave: Distribución de probabilidad, Confiabilidad, Función tasa de falla, IFR, resistencia de los materiales.

Abstract

Objects or materials that are subject to constant effort are likely to fail over time. These failures can occur randomly and if they are expensive machines or equipment hardly repairable as the satellites in orbit the costs are very high, hence the interest to study this type of techniques to analyze the failure rate. In the present work we use the nonparametric statistical test known as "Epstein test". This test was designed to determine if the behavior of an object or apparatus that is in continuous operation and which is susceptible to random failure, has an increasing failure rate (IFR). As experimental material we analyze a commercial latex elastic band and tested the hypothesis of an IFR behavior.

Keywords: Distribution function, Reliability, Failure rate function, IFR, resistance of the materials.

1. INTRODUCCIÓN

La necesidad de analizar la tasa de falla en bandas elásticas surge debido a que en clases de laboratorio de física básica a nivel superior, una de las preguntas que es común que los estudiantes realicen, consiste en saber si estas bandas elásticas pueden emplearse para la elaboración de dinamómetros por su alta elasticidad. Sin embargo, para responder a dicha pregunta los estudiantes realizan experimentos de tensión para incrementos sucesivos de cargas. Así, de este experimento, surgen limitantes sobre su uso, ya que el comportamiento de éstas es no lineal debido a su origen viscoelástico, a diferencia de lo que sucede con los resortes donde el comportamiento es puramente elástico, estas características anómalas en las bandas muestran un efecto de relajación (Popov (2000)), evidenciado por un incremento gradual de su longitud inicial cada vez que se retira la carga. De aquí surgen varias preguntas de investigación para los estudiantes, pero la que concierne al presente estudio es: al aplicar una carga constante a estas bandas elásticas: ¿Cuánto tiempo tarda en romperse? ¿Qué tan susceptible es de fallar esta banda elástica de manera aleatoria? Este interés surge en el laboratorio, ya que se discute la importancia de un diseño de experimentos en donde se alcance la meta deseada. Entonces se genera la necesidad del uso de la probabilidad y estadística para determinar la probabilidad y el concepto de tasa de falla.

Determinar el momento en que un equipo, componente u objeto va a fallar, no es posible, debido a que el tiempo en que se va a presentar la falla es una variable aleatoria, y como tal tiene una distribución de probabilidad que, describe la probabilidad de sobrevivencia del objeto en un determinado momento del tiempo. Sin embargo, a pesar de lo descrito previamente, resulta generalmente imposible describir con precisión la función de distribución de probabilidades del tiempo de falla. Se han hecho clasificaciones de dichas funciones de distribución de acuerdo a si cumplen una determinada característica o no, como la IFR (Increasing Failure Rate), NBU (New Better than Used), HNBUE (Harmonic New Better than Used in Expectation), entre otras, Barlow (1981) o Cedeño (2011). De tal manera que se pueda solventar el desconocimiento de la función de distribución exacta, o al menos precisar (con una determinada probabilidad) si pertenece a una clase específica o no.

En la siguiente sección se presentan las principales definiciones y conceptos básicos de la llamada teoría de la confiabilidad, en particular dirigiéndose a la definición de la clase de funciones de distribución llamada IFR.

Posteriormente se explica el concepto del Tiempo Total de Prueba (Total Time Test), que es empleado para la construcción de un estadístico no paramétrico, que será utilizado en la prueba de hipótesis apropiada a contrastar la clase IFR.

Finalmente, se analiza una banda elástica comercial de látex, para concluir si ésta presenta características IFR o no. Debido a que en la práctica es de gran utilidad conocer el rendimiento de ciertos materiales o componentes respecto al desgaste que sufren al realizar un trabajo de forma continua.

2. MÉTODOS Y MATERIALES

La función de distribución de la variable aleatoria que describe el tiempo de vida de un componente, sistema, objeto o persona, suele ser referida con el nombre de **distribución de vida**. Así, de manera formal, se dice que, sí la variable aleatoria X describe el tiempo de falla del componente, entonces la **confiabilidad** del componente (o de la variable aleatoria X) está dada en la expresión (1).

$$\bar{F}(x) = P[X > x] \quad (1)$$

Si X tiene función de densidad continua, entonces se define a la función tasa de falla de X en (2)

$$r(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}, \quad x > 0 \quad (2)$$

Hines (2008) muestra la descripción de la obtención de (2). La ecuación (2) también es llamada tasa de falla instantánea al tiempo x . El comportamiento de $r(x)$ describe características del componente en operaciones a lo largo del tiempo. Así, se tiene que,

- Si $r(x)$ permanece constante a lo largo del tiempo, puede ser indicativo de fallas aleatorias.
- Si $r(x)$ tiene un comportamiento como función monótona creciente, es indicativo de que el componente es más susceptible a fallar conforme pasa el tiempo, se dice que la falla se presenta debido al desgaste.
- Si $r(x)$ tiene un comportamiento como función monótona decreciente a lo largo del tiempo, esto es indicativo de que el componente tenía una alta probabilidad de fallar al inicio de comenzar operaciones, esto puede deberse a un mal proceso de producción, o fallas debidas a la baja calidad del material con que se elaboran los componentes, etc.

En la literatura del análisis de supervivencia a la componente con tasa de falla creciente se le llama IFR (Increasing Failure Rate), y si presenta una tasa de falla decreciente, entonces es llamado DFR (Decreasing Failure Rate). Así, para referirse a la distribución de vida de la variable aleatoria que describe la falla, se dice que es IFR o DFR. Además, se debe resaltar que al ser la distribución exponencial, la única con tasa de falla constante (ver Barlow (1981)), ésta se encuentra en la frontera de la clase de distribuciones de vida del tipo IFR y las del tipo DFR, siendo la única distribución en ser IFR y DFR.

Puede presentarse que, para cierta distribución la función tasa de falla (2) no sea monótona creciente o decreciente para todo $x > 0$, en este caso la IFR o DFR no es aplicable. Para conocer otro tipo de clases de distribuciones de vida y las relaciones existentes entre ellas puede verse Cedeño (2011).

En general se tiene interés en conocer las características de supervivencia y de envejecimiento de un objeto, del cual se tienen muchas unidades idénticas en stock, para conocer esto se realiza la siguiente prueba. Se toma una muestra aleatoria de tales objetos y se ponen a funcionar de manera independiente; una vez que uno de ellos falla o se descompone, se registra el tiempo en el que esto ocurre, y no son reemplazados. Específicamente, sea X_i la variable aleatoria que describe el tiempo de la falla del objeto i . Cada una de estas variables aleatorias tiene la misma distribución de probabilidades (pues son idénticas) pero desconocida (pues en caso de conocerse, no sería necesaria la realización de dicha prueba). La Figura 1, describe visualmente a modo de ejemplo, la prueba descrita con 5 objetos.

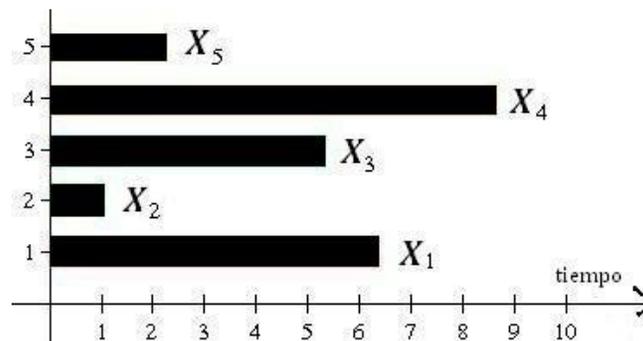


Figura 1. Variables aleatorias que describen el tiempo de falla de objetos.

Conforme va transcurriendo la prueba, se van registrando las fallas una por una, del total de n objetos. Así, el estadístico de orden $X_{(i)}$ describe el tiempo en que falló el i -ésimo objeto. Suponiendo que no existen 2 o más fallas simultáneas, se cumple:

$$X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$$

En este ejemplo de la gráfica de la Figura 1 se tiene que:

$$X_{(1)} = X_2,$$

$$X_{(2)} = X_5,$$

$$X_{(3)} = X_3,$$

$$X_{(4)} = X_1,$$

$$X_{(5)} = X_4$$

Ahora se pregunta, ¿Cuál fue el tiempo total de realización de la prueba?

Desde nuestra perspectiva cronológica del tiempo, se puede decir que la prueba terminó o concluyó en el momento en que el último componente presenta la falla, es decir, el tiempo $X_{(5)}$. Pero lo correcto sería decir que el tiempo total de la prueba está dado en (3)

$$\sum_{i=1}^n X_i \tag{3}$$

Dado que cada objeto estaba realizando su propia prueba, de manera independiente al resto.

Observe que los tiempos descritos, se pueden visualizar en la Figura 2.

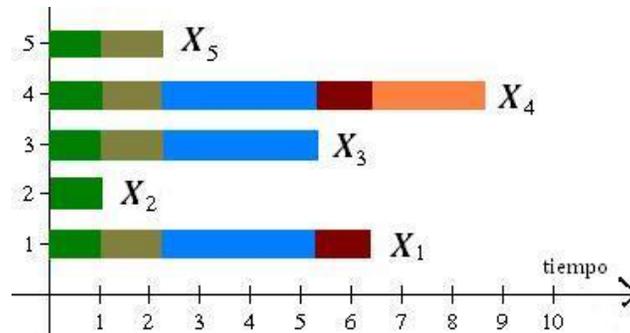


Figura 2. Descomposición de variables aleatorias como diferencia de estadísticos de orden.

En general, note que, n objetos registraron un tiempo de funcionamiento $X_{(1)}$, luego, $n - 1$ objetos registraron un tiempo de funcionamiento $X_{(2)} - X_{(1)}$ inmediatamente posterior al tiempo $X_{(1)}$, y así sucesivamente hasta que un solo objeto registró un tiempo de funcionamiento $X_{(n)} - X_{(n-1)}$ inmediatamente posterior al tiempo $X_{(n-1)}$.

Cada uno de estos eventos define una variable aleatoria D_i llamada espaciamento normalizado, definida (4)

$$D_i = (n - i + 1)(X_{(i)} - X_{(i-1)}) \text{ con } i = 1, \dots, n \tag{4}$$

En la Figura 2, cada espaciamento normalizado corresponde a la suma de cantidades del color correspondiente. De esta forma se puede definir el tiempo total de la prueba (Total Time Test, TTT), en términos de espaciamentos normalizados, como:

$$TTT = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n D_i = \sum_{i=1}^n (n - i + 1)(X_{(i)} - X_{(i-1)})$$

Donde solo resta definir $X_{(0)} = 0$.

Ahora si se consideran las n sumas parciales de los espaciamientos normalizados. Sea S_j la j -ésima suma parcial, es decir,

$$S_j = \sum_{i=1}^j D_i$$

En Ross (1996, pág. 67 y 68) se comenta y se demuestra el siguiente teorema:

Teorema 1. *Para un Proceso de Poisson.*

Sea T un tiempo fijo en el futuro, suponga que r eventos independientes ocurren durante el intervalo de tiempo $(0, T)$ descritos como $Y_1 \leq Y_2 \leq \dots \leq Y_r$; entonces estas r variables cuando están "desordenadas" se encuentran distribuidas uniformemente sobre el intervalo $(0, T)$.

Por el Teorema 1 se sabe que las variables aleatorias X_i se encuentran uniformemente distribuidas en el tiempo total de la prueba $(0, S_n)$. De esta forma la suma parcial S_j está uniformemente distribuida en el intervalo $(0, S_n)$. Entonces la estandarización (5)

$$\frac{S_i}{S_n} \quad (5)$$

se encuentra uniformemente distribuido en $(0, 1)$ para todo $i = 1, \dots, n - 1$, por lo tanto.

$$E\left[\frac{S_i}{S_n}\right] = \frac{1}{2}, \text{Var}\left[\frac{S_i}{S_n}\right] = \frac{1}{12}$$

Nota. Es necesario enfatizar que el desarrollo y conclusión inmediata anterior, es válido cuando la cantidad o número de eventos que se realizan es descrito mediante un Proceso de Poisson, tal y como se describe en el Teorema 1. Como es bien conocido (ver Ross (2011)), si el número de eventos es contabilizado mediante un proceso de Poisson, entonces la variable aleatoria que describe el tiempo entre eventos tiene una distribución de tipo exponencial.

El estadístico del tiempo total de prueba ε se muestra en (6), ver Hollander (1999)

$$\varepsilon = \frac{1}{S_n} \sum_{i=1}^{n-1} S_i \quad (6)$$

El cual tiene valor esperado y varianza dados en (7)

$$E[\varepsilon] = \frac{n-1}{2}, \quad \text{Var}[\varepsilon] = \frac{n-1}{12} \quad (7)$$

El estadístico ε , dado en (6), en el análisis estadístico de la confiabilidad de componentes y sistemas, es común referirle como, estadístico de Epstein o estadístico del tiempo total de prueba. Dicho estadístico define una distribución conocida como distribución de Epstein (Ver tabla A34 en Hollander (1999) pág. 735).

Una vez dado el estadístico de prueba, se puede definir formalmente las pruebas de hipótesis a utilizar. Como se sabe (ver cualquier libro de estadística, por ejemplo Hines (2008)) para cada tipo de prueba, está se puede definir de tres formas, según las características de interés o lo que deseamos contrastar; dos pruebas unilaterales y una prueba de forma bilateral. Por otra parte, dadas las IFR y DFR, es posible describir cada prueba de hipótesis con diferentes palabras, entre paréntesis se describe la prueba según la "forma" de la función tasa de falla.

Caso unilateral IFR, según Hollander (1999):

H_0 : La distribución F del tiempo de vida es exponencial

H_1 : La distribución F del tiempo de vida no es exponencial (y por tanto es IFR)

para un nivel de significancia α de la prueba, rechazar H_0 si $\varepsilon \geq e_\alpha$, donde e_α es un valor en la distribución de Epstein generada por ε , tal que $P[\varepsilon \geq e_\alpha] = \alpha$. Epstein (1960) mostró que, si la hipótesis H_0 es cierta, entonces los cocientes $\frac{S_i}{S_n}$ para todo $i = 1, \dots, n - 1$, tienen una distribución uniforme en $(0,1)$. Por tanto, de acuerdo a lo comentado en la Nota, esto sería representativo de un tiempo entre eventos de tipo exponencial. Como en este caso cada evento corresponde al registro de una falla, bajo la hipótesis de que H_0 es cierta entonces la distribución con que se presentan las fallas o digamos, la distribución de vida del componente no es de tipo exponencial

La forma en que se describe la prueba anterior, la hipótesis alternativa H_1 en la prueba de hipótesis anterior, se basa en la región de rechazo que se considere dentro de la distribución de Epstein. De esta forma se tiene que las otras 2 pruebas de hipótesis que se pueden construir son:

Caso unilateral DFR:

H_0 : La distribución F del tiempo de vida es exponencial

H_1 : La distribución F del tiempo de vida no es exponencial (y por tanto es DFR)

para un nivel α de significancia de la prueba, rechazar H_0 si $\varepsilon \leq \frac{n-1}{2} - e_\alpha$, donde e_α es un valor en la distribución de Epstein generada por ε , tal que $P[\varepsilon \geq e_\alpha] = \alpha$.

Caso bilateral IFR/DFR:

H_0 : La distribución F del tiempo de vida es exponencial

H_1 : La distribución F del tiempo de vida no es exponencial (y por tanto es IFR o DFR)

para un nivel α de significancia de la prueba, rechazar H_0 si $\varepsilon \leq \frac{n-1}{2} - e_{\alpha/2}$ ó $\varepsilon \geq e_{\alpha/2}$, donde $e_{\alpha/2}$ es un valor en la distribución de Epstein generada por ε , tal que $P[\varepsilon \geq e_{\alpha/2}] = \alpha/2$. En este último caso, el rechazo de H_0 y por tanto la aceptación de la hipótesis H_1 , no es representativo de afirmar que el componente sea IFR o DFR, pues habiendo rechazado la distribución exponencial, ambas clases por definición son disjuntas. Para decidir si es de un tipo u otro sería necesario realizar otros ensayos u otro tipo de análisis experimental.

3. RESULTADOS

Como elemento experimental se analizó una banda elástica comercial de látex de 2.1cm de diámetro utilizada en bisutería, como las mostradas en la Figura 3, todo esto con la finalidad de determinar su probabilidad de falla y contrastar la hipótesis de un comportamiento IFR en ésta.

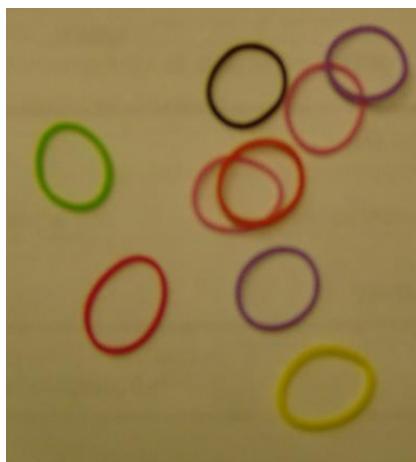


Figura 3. Ligas de látex empleadas para determinar el alargamiento y/o rompimiento de la liga bajo carga.

Esta banda elástica fue sometida bajo una carga de 0.25 Kg mientras se determinaba el alargamiento resultante como función del tiempo. La Figura 4 muestra el dispositivo empleado.

El sistema de medición para la determinación del alargamiento de la banda elástica en función del tiempo consistió de una interfase Pasco modelo Science Workshop 750 acoplada a una PC. A ésta se le adaptó un sensor de movimiento Pasco Scientific Motion Sensor II CI-6742. Este sensor permitió monitorear la posición o distancia a la base del portapesas mediante el software, a partir de esta referencia, fue posible determinar los alargamientos sucesivos en función del tiempo de la banda elástica. La frecuencia de muestreo utilizada fue de 5Hz.

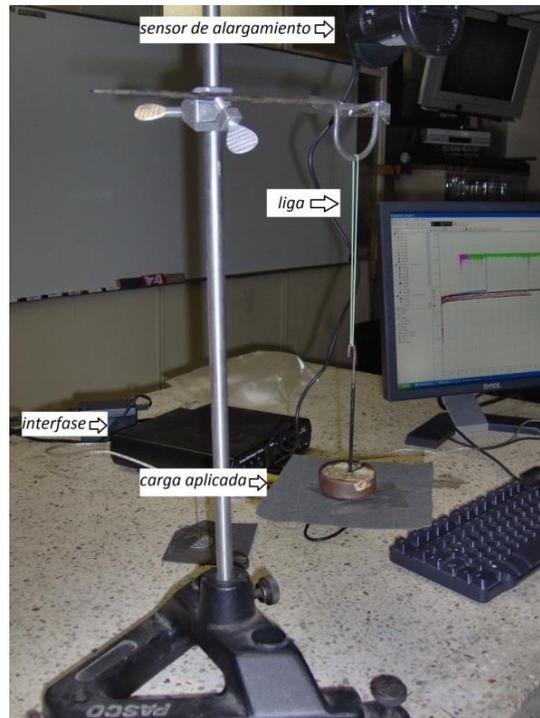


Figura 4. Dispositivo para determinar el alargamiento y/o rompimiento de la liga bajo carga como función del tiempo.

Los resultados del alargamiento en función del tiempo se ilustran en la Figura 5 para una muestra de 5 bandas elásticas.

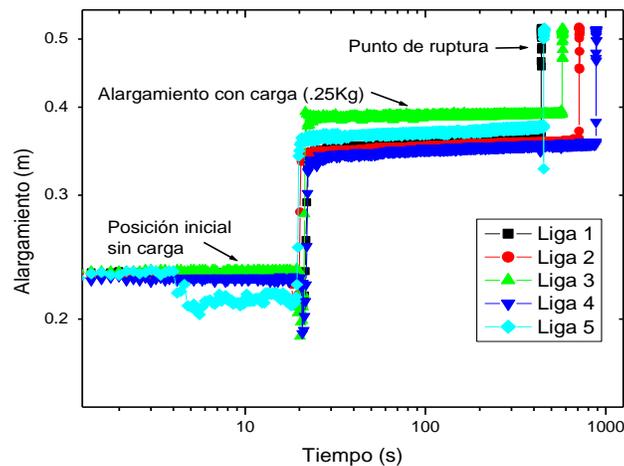


Figura 5. Comportamiento temporal del alargamiento y falla de una muestra de 5 bandas elásticas sometidas a una carga de tensión constante de 0.25kg.

Como puede apreciarse en la Figura 5, existen 3 etapas en el alargamiento temporal de la banda elástica. La etapa inicial en donde el sistema se encuentra sin carga, mientras que aproximadamente a un tiempo de 20 segundos inicia la etapa intermedia, ya que el sistema se carga y muestra el alargamiento correspondiente de la liga que se mantiene prácticamente constante al transcurrir el tiempo, mientras que la etapa final ocurre cuando la liga se rompe y se identifica el punto de ruptura correspondiente.

A partir de estos resultados, se determinaron los correspondientes tiempos de ruptura para cada banda elástica, cada uno de estos tiempos representará la falla de la banda de látex. En total se realizó el experimento con una muestra de 12 bandas de idénticas características (salvo su color). Dichos resultados se resumen en la Tabla 1.

Tabla 1. Tiempos de ruptura para la banda elástica.

Muestra	Tiempo de ruptura (seg.)
1	435
2	450
3	569
4	885
5	709
6	423
7	436
8	546
9	284
10	630
11	437
12	908

Obteniendo una media muestral para el rompimiento de la liga de 559.3s y una desviación estándar de 192.4s

Una vez obtenida la información muestral, se calculó el valor del estadístico (6), que en este caso tiene un valor de, $\varepsilon = 8.8543$.

El interés es contrastar la hipótesis respecto a que las bandas de látex tienen una tasa de falla estrictamente creciente conforme pasa el tiempo, es decir, su resistencia es del tipo IFR. Con una probabilidad de cometer un error tipo I de 5%, obtenemos un valor crítico de 7.07, de acuerdo a la tabla de la distribución de Epstein, (ver Hollander (1999), pág. 735)

Dado que el estadístico de prueba tiene un valor mayor al valor crítico, entonces se rechaza la hipótesis nula, es decir, la distribución del tiempo de falla efectivamente es de clase IFR, de lo cual se puede decir que las ligas de látex tienen un comportamiento creciente a fallar con el paso del tiempo.

4. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se mostraron las bases y fundamentos de la prueba estadística no paramétrica de Epstein, o también llamada prueba del tiempo total de prueba.

El interés en esta prueba surgió como una medida para determinar características y comportamientos de determinados materiales, los cuales se encuentran sujetos a una tensión que genera un desgaste al paso del tiempo. Se comenzó con un ejemplo que se puede considerar sencillo, como es la utilización de las bandas de látex, sin embargo, un propósito más adelante es determinar características para las fibras de algodón y textiles.

Debe mencionarse que, la aplicación de las pruebas descritas en este trabajo, está basada en la hipótesis de que la función tasa de falla de la distribución de vida de la componente tenga un

comportamiento: constante o no constante, a lo largo del tiempo. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, puede ocurrir que la verdadera naturaleza del componente sea distinta y más compleja que contrastar la hipótesis de una tasa de falla constante. Así, por ejemplo, el rechazo de H_0 , y por ende la aceptación de la hipótesis H_1 , debe ser tomada con cuidado ya que pudiera no representar realmente una afirmación de que la distribución de vida y por tanto la componente sea de características IFR (o DFR).

Finalmente, es de comentar que este tipo de análisis es de gran interés en el laboratorio de física a nivel superior, pues permite elucidar el diseño de experimentos espaciales como el astromovil curiosity.

5. REFERENCIAS

- Barlow R.E. and Proschan F. (1981), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing, to begin with*.
- Cedeño Hernández. M and Rocha-Martínez J.M. (2011), “Cotas basadas en la vida media respecto a las principales clases de envejecimiento”, *Memorias de la XVI Reunión Académica de Física y Matemáticas*.
- Epstein B. (1960), “Tests for the validity of the Assumption that the Underlying distribution of life is exponential”, *Technometrics*, Vol.2 No. 1, pp 83-101.
- Hines W.W., Montgomery D.C., Goldsman D.M., Borror C.M. (2008), *Probabilidad y Estadística para Ingeniería*, 4ta Edición, Grupo Editorial Patria.
- Hollander M. and Wolfe D.A. (1999), *Nonparametric Statistical Methods*, 2nd Edition, John Wiley & Sons.
- Popov E. P. and Balan T. A. (2001), *Mecánica de Sólidos*, 2nd Edition, Pearson Education.
- Ross S. (1996), *Stochastic Processes*, 2nd Edition, John Wiley & Sons.
- Ross S. (2014), *Introduction to Probability Models*, 11th Edition, Elsevier.

Este artículo puede citarse de la siguiente forma:

Citación estilo APA sexta edición

Cedeño Hernández, M., Méndez Sánchez, A.F. & Sánchez Cruz, P. (mayo-agosto de 2018). Análisis de la tasa de falla de una banda elástica de látex mediante métodos estadísticos no paramétricos. *Revista Multidisciplinaria de Avances de Investigación*, 4(2), 23-31.

Citación estilo Chicago decimoquinta edición

Cedeño-Hernández, Miguel, Méndez-Sánchez, Arturo Fidencio & Sánchez-Cruz, Patricia. Análisis de la tasa de falla de una banda elástica de látex mediante métodos estadísticos no paramétricos. *Revista Multidisciplinaria de Avances de Investigación*, 4 No. 2 (mayo-agosto de 2018): 23-31.

Citación estilo Harvard Anglia

Cedeño Hernández, M., Méndez Sánchez, A.F. & Sánchez Cruz, P., 2018. Análisis de la tasa de falla de una banda elástica de látex mediante métodos estadísticos no paramétricos. *Revista Multidisciplinaria de Avances de Investigación*, mayo-agosto, 4(2), pp. 23-31.

Citación estilo IEEE

[1] M. Cedeño-Hernández, A.F. Méndez-Sánchez y P. Sánchez-Cruz. Análisis de la tasa de falla de una banda elástica de látex mediante métodos estadísticos no paramétricos. *Revista Multidisciplinaria de Avances de Investigación*, vol. 4 No. 2, pp. 23-31, mayo-agosto de 2018.